第27卷 第6期
2010年12月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 27 No. 6
Dec. 2010

文章编号:1005-3085(2010)06-1086-05

张量积空间中框架的一种新构造

段东东, 姚振宇, 马小燕, 吴文海

(西安电力高等专科学校基础教学部，西安 710032)

摘 要: 因为非张量积且较实用的高维小波基不多见，常常用低维的小波基作张量积来构造高维小波基。本文中，我们利用算子论的方法，研究了两个Hilbert空间中的框架张量以及张量积空间中框架的关系。将高维空间中的框架表示可以转化为低维空间中的框架张量，同时也可以把高维空间中的向量用低维空间的框架张量来表示。

关键词: 小波基；张量积；框架；算子

分类号: **AMS**(2000) 46B15; 40A99 **中图分类号**: O177.1 **文献标识码**: A

1 引言

框架的概念早在1952年由Duffin和Schaefer在研究非调和Fourier分析中提出[1]。研究框架有着非常重要的现实意义，现在这一理论已经成为小波分析的重要组成部分，是研究小波分析的一个主要工具，并且被运用到了数学、自然科学及工程学等领域，它广泛应用于信号处理、图像处理、数据压缩、采样理论、数学领域本身的许多学科等[2,3]。算子理论与框架理论的结合又使框架研究向前推动了一步，从而开辟了框架研究的新方向[4,5]。

小波分析中的框架通常是指由Hilbert空间中的满足某种特性的一列向量组成的集合。即空间中的任何元素都可以用框架来“表示”，从这个意义上看，框架是正规正交基的一般推广。但框架的研究还需进一步的深入，比如就向量小波来说，经典的小波理论以空间中的小波与信号作内积而定义的小波变换为基础，我们称其数量积小波理论。但随着应用的深入，它表现出一些不足：对信号整体作内积，可能会使信号一开始就被磨光而平滑掉某些重要信息，减弱提取信号特征和奇异性的精度，而且多级小波分解会加剧这种情况的发生，从而影响分析信号的整体效果。另一方面，在实际中，因为非张量积且较实用的高维小波基不多见，常常用低维的小波基作张量积来构造高维小波基。本文的主要目的就是把空间张量积和Hilbert空间中的框架理论相结合，通过研究Hilbert空间中的框架，定义了张量积空间中的框架概念，并且得到了一系列有趣的结果。

设H, K为复可分无限维Hilbert空间，I表示可数集(将作为指标集)。$l^2\equiv l^2(I)$表示满足条件

$$\left\|\{c_n\}_{n\in I}\right\|_2=\Big(\sum_{n\in I}|c_n|^2\Big)^{1/2}<\infty$$

的所有复数族$\{c_n\}_{n\in I}$构成的Hilbert空间，简记为l^2，其中内积定义为

$$\big\langle\{c_n\}_{n\in I},\{d_n\}_{n\in I}\big\rangle=\sum_{n\in I}c_n\overline{d_n},$$

收稿日期: 2009-12-02. **作者简介**: 段东东(1967年3月生)，女，讲师. 研究方向：算子代数与小波分析.

它具有典型正规正交基

$$\{\{\delta_{n,k}\}_{k\in I} : n \in I\}.$$

定义 $S_H(I) = \{\{f_n\}_{n\in I}:\ f_n \in H,\ n \in I\}$。$B(H, l^2)$ 表示由所有从 H 到 l^2 中的有界线性算子构成的 Banach 空间。

定义 1[6] 设 $f = \{f_n\}_{n\in I} \in S_H(I)$，若存在正常数 M_f 使得

$$\sum_{n\in I} \left|\langle x, f_n\rangle\right|^2 \le M_f\|x\|^2, \quad \forall\, x \in H,$$

则称 f 为 H 中的一个 Bessel 族。记 $B_H(I)$ 为 H 的所有以 I 为指标集的 Bessel 列之集。

定义 2[6] 设 $f = \{f_n\}_{n\in I} \in S_H(I)$，若存在正常数 A, B 使得

$$A\|x\|^2 \le \sum_{n\in I} \left|\langle x, f_n\rangle\right|^2 \le B\|x\|^2, \quad \forall\, x \in H,$$

则称 f 为 H 中的一个框架。记 $F_H(I)$ 为 H 的所有以 I 为指标集的框架之集。

对于任一 $f = \{f_n\}_{n\in I} \in B_H(I)$，定义

$$T_f : H \to l^2, \quad T_f x = \{\langle x, f_n\rangle\}_{n\in I}, \quad \forall\, x \in H,$$

显然 $T_f \in B(H, l^2)$。

设 $H\hat{\otimes}K$ 为 Hilbert 空间 H 与 K 的张量积[7]，定义

$$H \otimes K = \Big\{ \sum_{k\in I} x_k \otimes y_k \,|\, x_k \in H,\ y_k \in K \Big\},$$

则 $H \otimes K$ 在 $H\hat{\otimes}K$ 中是稠密的，且其内积满足

$$\langle x \otimes y, x' \otimes y'\rangle = \langle x, x'\rangle\langle y, y'\rangle, \quad \forall\, x, x' \in H, \quad y, y' \in K.$$

若 $T \in B(H)$, $S \in B(K)$，则存在唯一的算子 $T \otimes S \in B(H\hat{\otimes}K)$，满足

$$(T \otimes S)(x \otimes y) = Tx \otimes Ty, \quad \forall\, x \in H, \quad y \in K.$$

注 1 在以上内积定义下，规定范数如下定义：任取 $x \otimes y \in H\hat{\otimes}K$，有

$$\|x \otimes y\| = \|x\|\,\|y\|.$$

下面定义 $H\hat{\otimes}K$ 中的框架。

定义 3 设 $f = \{f_n\}_{n\in I} \in S_H(I)$, $g = \{g_n\}_{n\in I} \in S_K(I)$, $f \otimes g = \{f_n \otimes g_m\}_{n,m\in I} \in S_{H\hat{\otimes}K}(I \times I)$。若存在常数 A, B，使得

$$A\|z\|^2 \le \sum_{n,m\in I} \left|\langle z, f_n \otimes g_m\rangle\right|^2 \le B\|z\|^2, \quad \forall\, z \in H\hat{\otimes}K,$$

则称 $f \otimes g$ 为 $H\hat{\otimes}K$ 中的框架。若只要求上式中右边不等式成立，则称 $f \otimes g$ 为 $H\hat{\otimes}K$ 中的 Bessel 列。

记 $B_{H\hat{\otimes}K}(I \times I)$, $F_{H\hat{\otimes}K}(I \times I)$ 表示 $H\hat{\otimes}K$ 中的所有以 $I \times I$ 指标集标号的 Bessel 族，框架之集。显然当 $f \otimes g$ 为 $H\hat{\otimes}K$ 中的框架时，必有

$$A\|x \otimes y\|^2 \le \sum_{n,m\in I} \left|\langle x \otimes y,\, f_n \otimes g_m\rangle\right|^2 \le B\|x \otimes y\|^2, \quad \forall\, x \in H, \quad y \in K.$$

对任一 $f\otimes g\in B_{H\hat{\otimes}K}(I\times I)$，定义

$$T_{f\otimes g}:H\hat{\otimes}K\to l^2(I\times I),\quad z\mapsto\{\langle z,f_n\otimes g_m\rangle\}_{n,m\in I},\quad \forall\, z\in H\hat{\otimes}K.$$

显然 $T_{f\otimes g}\in B(H\hat{\otimes}K,l^2)$，且 $\|T_{f\otimes g}\|=\|f\otimes g\|$，称之为 $f\otimes g$ 的准框架算子。因此 $T_{f\otimes g}$ 的共轭算子由下式给出：对任意的 $x\otimes y\in H\hat{\otimes}K$，有

$$T^*_{f\otimes g}:l^2(I\times I)\to H\hat{\otimes}K,\quad \big\{\langle x\otimes y,f_n\otimes g_m\rangle\big\}_{n,m\in I}\mapsto\sum_{n,m\in I}\langle x\otimes y,f_n\otimes g_m\rangle f_n\otimes g_m.$$

由文献[1]容易得到 $T_{f\otimes g}$ 为下有界算子。

定义4 设 $f\otimes g\in F_{H\hat{\otimes}K}(I\times I)$，则称 $S_{f\otimes g}=T^*_{f\otimes g}T_{f\otimes g}\in B(H\hat{\otimes}K)$ 为框架 $f\otimes g$ 的框架算子。显然 $S_{f\otimes g}$ 是 $H\hat{\otimes}K$ 的正的可逆有界线性算子，且 $AI_{H\hat{\otimes}K}\leq S_{f\otimes g}\leq BI_{H\hat{\otimes}K}$，其中 $I_{H\hat{\otimes}K}$ 是 $H\hat{\otimes}K$ 上的恒等算子。

2 主要结论

定理1 设 $f=\{f_n\}_{n\in I}\in F_H(I)$ 的界为 A_f 和 B_f，$g=\{g_n\}_{n\in I}\in F_K(I)$ 的界为 A_g 和 B_g，则 $f\otimes g\in F_{H\hat{\otimes}K}(I\times I)$。

证明 因为 $f=\{f_n\}_{n\in I}\in F_H(I)$ 的界为 A_f 和 B_f，所以有

$$A_f\|x\|^2\leq\sum_{n\in I}\big|\langle x,f_n\rangle\big|^2\leq B_f\|x\|^2,\quad \forall\, x\in H,$$

又因为 $g=\{g_n\}_{n\in I}\in F_K(I)$ 的界为 A_g 和 B_g，则有

$$A_g\|y\|^2\leq\sum_{n\in I}\big|\langle y,g_n\rangle\big|^2\leq B_g\|y\|^2,\quad \forall\, y\in H,$$

因此，对任意的 $x\otimes y\in H\hat{\otimes}K$，有

$$\begin{aligned}\sum_{n,m\in I}\big|\langle x\otimes y,f_n\otimes g_m\rangle\big|^2 &= \sum_{n,m\in I}\big|\langle x,f_n\rangle\big|^2\big|\langle y,g_m\rangle\big|^2=\sum_{n\in I}\big|\langle x,f_n\rangle\big|^2\sum_{m\in I}\big|\langle y,g_m\rangle\big|^2\\ &\leq B_f\|x\|^2B_g\|y\|^2=B_fB_g\|x\otimes y\|^2.\end{aligned}$$

另一方面

$$\sum_{n\in I}\big|\langle x,f_n\rangle\big|^2\sum_{m\in I}\big|\langle y,g_m\rangle\big|^2\geq A_fA_g\|x\otimes y\|^2.$$

因此，$f\otimes g\in F_{H\hat{\otimes}K}(I\times I)$。

证毕

定理2 设 $f\otimes g\in F_{H\hat{\otimes}K}(I\times I)$ 且界为 $A_{f\otimes g}$ 和 $B_{f\otimes g}$。若 $f=\{f_n\}_{n\in I}\in F_H(I)$ 的界为 A_f 和 B_f，则 $g=\{g_n\}_{n\in I}\in F_K(I)$。

证明 因为 $f=\{f_n\}_{n\in I}\in F_H(I)$ 的界为 A_f 和 B_f，所以有

$$A_f\|x\|^2\leq\sum_{n\in I}\big|\langle x,f_n\rangle\big|^2\leq B_f\|x\|^2,\quad \forall\, x\in H.$$

又因为 $f\otimes g\in F_{H\hat{\otimes}K}(I\times I)$，且界为 $B_{f\otimes g}$ 和 $A_{f\otimes g}$，则有

$$A_{f\otimes g}\|x\otimes y\|^2\leq\sum_{n,m\in I}\big|\langle x\otimes y,f_n\otimes g_m\rangle\big|^2\leq B_{f\otimes g}\|x\otimes y\|^2,\quad \forall\, x\in H,\quad y\in K.$$

因此，由定理1的证明可得

$$\sum_{n,m\in I}\left|\langle x\otimes y,f_n\otimes g_m\rangle\right|^2=\sum_{n\in I}\left|\langle x,f_n\rangle\right|^2\sum_{m\in I}\left|\langle y,g_m\rangle\right|^2.$$

所以，对任意的$y\in K$，有

$$\sum_{m\in I}\left|\langle y,g_m\rangle\right|^2=\frac{\sum_{n\in I}|\langle x,f_n\rangle|^2\sum_{m\in I}|\langle y,g_m\rangle|^2}{\sum_{n\in I}|\langle x,f_n\rangle|^2}\leq\frac{B_{f\otimes g}}{A_f}\|y\|^2,$$

且

$$\sum_{m\in I}\left|\langle y,g_m\rangle\right|^2=\frac{\sum_{n\in I}|\langle x,f_n\rangle|^2\sum_{m\in I}|\langle y,g_m\rangle|^2}{\sum_{n\in I}|\langle x,f_n\rangle|^2}\geq\frac{A_{f\otimes g}}{B_f}\|y\|^2,$$

故$g=\{g_n\}_{n\in I}\in F_K(I)$。 **证毕**

由定理1和定理2易知，下述更一般的结论也成立。

推论1 若$f^1,f^2,\cdots,f^n$分别是$H_1,H_2,\cdots,H_n$的框架，则$\otimes_{i=1}^n f^i$是Hilbert空间$\otimes_{i=1}^n H_i$的框架。

推论2 若$f^1,f^2,\cdots,f^{i-1},f^{i+1},\cdots,f^n$分别是$H_1,H_2,\cdots,H_{i-1},H_{i+1},\cdots,H_n$的框架，并且$\otimes_{n\neq i}^n f^n$是Hilbert空间$\otimes_{n\neq i}H_n$的框架，则$f^i$是Hilbert空间$H_i$的框架。

定理3 设$T\in B(H)$, $S\in B(K)$。设$f\in F_H(I)$, $g\in F_K(I)$，则T,S都是满射算子的充分必要条件是$(T\otimes S)(f\otimes g)=T_f\otimes S_g\in F_{H\hat{\otimes}K}(I\times I)$，且$T\otimes S$也为满射算子。

证明 充分性。设T,S都是满射算子。因为$f\in F_H(I)$，则$Tf\in F_H(I)$。同理可得$Sg\in F_K(I)$。由定理1可知，$(T\otimes S)(f\otimes g)=T_f\otimes S_g\in F_{H\hat{\otimes}K}(I\times I)$。所以，由文献[1]知$T\otimes S$也为满射算子。

必要性。设$(T\otimes S)(f\otimes g)=T_f\otimes S_g\in F_{H\hat{\otimes}K}(I\times I)$。因为$f\in F_H(I)$, $g\in F_K(I)$，应用定理2的结果得$Tf\in F_H(I)$, $Sg\in F_K(I)$。因此T,S都是满射算子。 **证毕**

在文献[1]中我们知道框架与算子之间的关系是一一对应的，Bessel列是有界算子作用在正规正交基上得到的，框架是满射算子作用在正规正交基上得到的，通过定理3的证明发现：空间张量积中的框架张量积与算子张量积也存在着一一对应关系，因此得到了下面的引理。

引理1 设H_1, H_2是Hilbert空间，则$\{\varphi_i\}_{i\in I}$与$\{\phi_i\}_{i\in I}$分别为H_1, H_2的正规正交基的充分必要条件为$\{\varphi_i\otimes\phi_i\}_{i\in I}$是$H_1\otimes H_2$的正规正交基。

定理4 设$f\in F_H(I)$, $g\in F_K(I)$，任取$H_1\hat{\otimes}H_2$的正规正交基$\{\varphi_i\otimes\phi_i\}_{i\in I}$，则$f\otimes g\in F_{H\hat{\otimes}K}(I\times I)$的充分必要条件是存在$T,S$都是满射算子且使得对任意的$i\in I$，有$f_i=T\varphi_i$, $g_i=S\phi_i$。

证明 必要性。设$f\otimes g\in F_{H\hat{\otimes}K}(I\times I)$，则由$f\in F_H(I)$及定理2可得$g\in F_K(I)$，再由文献[1]得，存在$T\otimes S$都是满射算子且使得对任意的$i\in I$，有$f_i=T\varphi_i$, $g_i=S\phi_i$。

充分性。设存在T,S都是满射算子且使得对任意的$i\in I$，有$f_i=T\varphi_i$, $g_i=S\phi_i$，则$g\in F_K(I)$，又因为$f\in F_H(I)$，因此由定理1可得，$f\otimes g\in F_{H\hat{\otimes}K}(I\times I)$。 **证毕**

参考文献：

[1] Duffin R J, Schaeffer A C. A class of nonharmonic Fourier series[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1952, 72: 341-366

[2] 曹怀信，赵建伟. 小波分析发展综述[J]. 咸阳师范学院学报(自然科学版)，2002, 17(6): 5-8
Cao H X, Zhao J W. A survey of developments of wavelet analysis[J]. Journal of Xianyang Normal University (Natural Science Edition), 2002, 17(6): 5-8

[3] 曹怀信，李卫华. 正规积分小波变换及其连续性[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版)，2002, 31(1): 1-6
Cao H X, Li W H. Normal integral wavelet translation and its continuity[J]. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2002, 31(1): 1-6

[4] 虞志坚，曹怀信. Banach 空间中的阶 Bessel 序列[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版)，2001, 29(3): 20-23
Yu Z J, Cao H X. Bessel sequences in Banach space[J]. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2001, 29(3): 20-23

[5] 李登峰，薛明志. Banach 空间上的基和框架[M]. 北京：科学出版社，2007
Li D F, Xue M Z. Base and Frames in Banach Space[M]. Beijing: Science Press, 2007

[6] Cao H X. Bessel sequences in a Hilbert space[J]. Chinese Journal Engineering Mathematics, 2000, 17(2): 92-95

[7] Gerard J, Murphy. C^*-Algebras and Operator Theory[M]. Ireland: Academic Press, 1990

A New Construction of Frames in the Tensor Product Space

DUAN Dong-dong, YAO Zhen-yu, MA Xiao-yan, WU Wen-hai

(Department of Basic Courses, Xi'an Electric Power College, Xi'an 710032)

Abstract: In the wavelet analysis, we rarely see non-tensor product and high-dimensional wavelet bases, we always construct high-dimensional wavelet base by using low-dimensional ones. In this paper, it is studied that the relations between tensor product of frames in two Hilbert spaces and frames in a tensor product space by using operator theory. We convert frames in a high-dimensional space into a tensor of frames in some low-dimensional spaces, and represent vectors in a high-dimensional space as the tensor of frames in some low-dimensional spaces.

Keywords: wavelet base; tensor product; frame; operator

Received: 02 Dec 2009. **Accepted:** 13 Apr 2010.